УДК 517.911 DOI: 10.14529/mmp160205

МЕТОД НЕГЛАДКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.В. Корнев

Как известно, дифференциальные включения являются очень удобным математическим аппаратом, моделирующим нелинейные управляемые системы с обратной связью, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики. В настоящей работе предлагаются новые методы решения задачи о периодических колебаниях управляемых объектов, описываемых дифференциальным включением с каузальным оператором. Впервые дифференциальные уравнения с каузальным оператором, или уравнения типа Вольтерра, были рассмотрены Л. Тонелли и А.Н. Тихоновым. А.Н. Тихонов использовал их в качестве модели при изучении ряда задач теплопроводности, в частности, задачи об остывании тела при лучеиспускании с поверхности. В первой части работы предполагается, что правая часть включения является многозначным отображением, имеющим выпуклые замкнутые значения. Далее предполагается, что правая часть включения невыпуклозначна и полунепрерывна снизу. В силу специфики рассматриваемого объекта в качестве основного инструмента исследования рассматриваемой задачи в обоих случаях используется модифицированный метод классической направляющей функции. А именно, метод негладкой интегральной направляющей функции. Применение теории топологической степени и указанного метода позволяет установить разрешимость периодической задачи в каждом из рассматриваемых случаев.

Ключевые слова: включение; каузальный оператор; негладкая интегральная направляющая функция; периодические решения; топологическая степень совпадения.

Введение

Изучение систем, описываемых дифференциальными и функциональными уравнениями с каузальными операторами, введенными Л. Тонелли [1] и А.Н. Тихоновым [2], привлекает внимание многих исследователей. Отметим, что в свое время для исследования влияния излучения на температурный режим земной коры А.Н. Тихоновым были изучены задачи для уравнения теплопроводности при нелинейных краевых условиях. Им была предложена редукция, сводящая эти задачи к нелинейным интегральным уравнениям типа Вольтерра. В качестве приложений полученных результатов к задачам математической физики был рассмотрен ряд задач теплопроводности, в частности, задача об остывании тела при лучеиспускании с поверхности.

Понятие каузального оператора оказалось мощным инструментом для унификации задач в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнений Вольтерра, функциональных уравнений нейтрального типа и др. [3]. Различные задачи для функционально-дифференциальных уравнений с каузальными операторами были рассмотрены в работах [4–10]. В частности, граничная и периодическая проблемы изучались в [5, 7]. В настоящей работе применяется метод негладких интегральных направляющих функций в исследовании периодической задачи для дифференциального включения с многозначным каузальным оператором.

Основные идеи метода направляющих функций были сформулированы М.А. Красносельским и А.И. Перовым еще в середине прошлого века [11, 12]. Будучи геометрически наглядным, этот метод первоначально применялся к изучению периодических и ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [13–15]. Позже этот метод был распространен на случай дифференциальных включений (см., например, [16, 17]), функционально-дифференциальных уравнений и включений (см., например, [18, 19]) и другие объекты. Как известно, дифференциальные включения - достаточно удобный математический аппарат, описывающий нелинейные управляемые системы с обратной связью, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики (см., например, [16,17]). Сфера применения метода направляющих функций была расширена на изучение качественного поведения и бифуркации решений (см., например, [20]), асимптотики решений (см., например, [21, 22]). Эти и другие аспекты метода направляющих функций и его приложений, а также дополнительную библиографию, можно найти в недавно вышедшей монографии [23].

Работа организована следующим образом. После предварительных сведений (п. 1), где определяется, в том числе, понятие многозначного каузального оператора, формулируется периодическая задача для дифференциального включения с каузальным мультиоператором, приводится основной результат работы как для включений с выпуклозначным и замкнутым каузальным мультиоператором (п. 2.1), так и для случая, когда правая часть включения является полунепрерывным снизу каузальным мультиоператором с невыпуклыми значениями (п 2.2).

1. Предварительные сведения

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) [16,17,24,25].

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y. Если Y — нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$ и $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых замкнутых и, соответственно, компактных подмножеств пространства Y.

Определение 1. *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε-окрестность множества.*

Определение 2. *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется пн. св., если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.*

Определение 3. *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x_0) \subset U_\varepsilon(F(x))$.*

Определение 4. *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется пн. сн., если оно пн. сн. в каждой точке $x \in X$.*

Определение 5. *Если мультиотображение F полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.*

Определение 6. *Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$,*

$$\Gamma_F = \{(x, y) \mid \ (x, y) \in X \times Y, \quad y \in F(x)\}$$

называется графиком мультиотображения F.

Определение 7. *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется замкнутым, если его график Γ_F есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.*

Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Определение 8. *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется компактным, если образ $F(X)$ является относительно компактным в Y.*

Определение 9. *Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением мультиотображения F, если $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$.*

Пусть E – сепарабельное банахово пространство; $L^1([a, b]; E)$ обозначает банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых по Бохнеру функций $f : [a, b] \to E$.

Определение 10. *Непустое множество $M \subset L^1([a, b]; E)$ называется разложимым, если для любых $f, g \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [a, b]$ выполнено*

$$f\kappa_m + g\kappa_{([a,b]\setminus m)} \in M,$$

где κ_m – характеристическая функция множества m.

В дальнейшем будет использоваться следующая теорема Брессана – Коломбо – Фрышковского о непрерывном сечении (см., например, [24]).

Лемма 1. *Пусть X – сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $F : X \multimap L^1([a, b]; E)$ с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывное сечение.*

Пусть I – замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 11. *Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз*

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

– измеримое подмножество I.

Замечание 1. Всякая пн. сн. мультифункция измерима.

Замечание 2. Всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, то есть существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех (п.в.) $t \in I$.

Определение 12. *Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет условию подлинейного роста, если существует неотрицательная суммируемая по Лебегу на I функция $\alpha(\cdot)$ такая, что п.в. $t \in I$*

$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

В дальнейшем мы будем использовать определения и элементарные свойства топологической степени однозначных и многозначных векторных полей (см., например, [11, 17, 24, 25]).

Пусть $T > 0$ и $\sigma \geq 0$ – данные числа. Символами $C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n)$ и $L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$, где $k \in \mathbb{Z}$, обозначаем соответствующие пространства непрерывных и суммируемых функций с обычными нормами. Для подмножества $\mathcal{N} \subset L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$ и $\tau \in (kT, (k+1)T)$ сужение $\mathcal{N}$ на (kT, τ) определяется как $\mathcal{N}|_{(kT,\tau)} = \{f|_{(kT,\tau)} : f \in \mathcal{N}\}$.

Определение 13. *Будем говорить, что $\mathcal{Q}$ – каузальный мультиоператор, если для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мультиотображение*

$$\mathcal{Q} : C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$$

задано таким образом, что для каждого $\tau \in (kT, (k+1)T)$ и для любых

$$u(\cdot), v(\cdot) \in C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n)$$

условие $u|_{[kT-\sigma,\tau]} = v|_{[kT-\sigma,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}(u)|_{(kT,\tau)} = \mathcal{Q}(v)|_{(kT,\tau)}$.

Рассмотрим примеры каузальных мультиоператоров. Обозначим $\mathcal{C}$ банахово пространство $C([-\sigma, 0]; \mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ мультифункция $F(\cdot, c) : \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ допускает измеримое сечение для каждого $c \in \mathcal{C}$;

$(F2)$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t \in \mathbb{R}$;

$(F3)$ для любого $r > 0$ найдется локально суммируемая неотрицательная функция $\eta_r(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|F(t,c)\| := \sup\{\|y\| : y \in F(t,c)\} \leq \eta_r(t) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R},$$

для всех $c \in \mathcal{C}$, $\|c\| \leq r$.

Известно (см., например, [24, 25]), что при условиях $(F1) - (F3)$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$, определен мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F : C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{P}_F(u) = \left\{ f \in L^1((kT,(k+1)T];\mathbb{R}^n) : \; f(t) \in F(t,u_t) \text{ п.в. } t \in (kT,(k+1)T) \right\}.$$

Здесь $u_t \in \mathcal{C}$ определено как $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $\theta \in [-\sigma, 0]$. Мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

Пример 2. Пусть $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ – мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(F1) - (F3)$ примера 1. Пусть $\{K(t,s) : -\infty < s \le t < +\infty\}$ – непрерывное семейство линейных операторов в $\mathbb{R}^n$ и $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ – данная локально суммируемая функция. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим интегральный мультиоператор типа Вольтерра $\mathcal{G} : C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$, определенный как

$$\mathcal{G}(u)(t) = m(t) + \int\limits_{kT}^{t} K(t,s)F(s,u_s)ds,$$

т.е.

$$\mathcal{G}(u) = \left\{ y \in L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n) : y(t) = m(t) + \int\limits_{kT}^{t} K(t,s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F(u) \right\}.$$

Мультиоператор $\mathcal{G}$ также является каузальным.

Пример 3. Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R}\times\mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующему условию почти полунепрерывности снизу:

(F_L) найдется последовательность непересекающихся замкнутых множеств $\{J_n\}$, $J_n \subseteq \mathbb{R}$ $n = 1, 2, ...$ такая, что: (i) $meas\,(\mathbb{R} \setminus \bigcup_n J_n) = 0$; (ii) сужение F на каждое множество $J_n \times \mathcal{C}$ полунепрерывно снизу.

При условиях (F_L), $(F3)$ (см., например, [24, 25]) для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F : C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$$

также определен и каузален.

2. Математическая модель

Принимая за основу схему, предложенную в [3], рассмотрим следующую модель управляемого ядерного реактора. Будем считать, что его динамика описывается следующей системой функционально-операторных уравнений:

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \Lambda^{-1}[x(t) - y_k(t)] - P\Lambda^{-1}[1 + x(t)]\nu(t), \tag{1}$$

$$y'_k(t) = \lambda_k[x(t) - y_k(t)], \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

$$\nu \in U(x). \tag{3}$$

Здесь x обозначает мощность реактора; y_k – потоки медленных нейтронов; β_k, P, Λ и λ_k, $k = 1, 2, ..., m$ – некоторые константы; ν – функция управления, удовлетворяющая условию обратной связи (3) с каузальным мультиоператором U.

Конкретный вид мультиоператора U зависит от условий задачи. В частности, он может быть выбран в следующей форме (см. [3]):

$$U(x) = \left\{ \nu \,:\, \nu(t) = \alpha_0 x(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x(t - t_j) + \int\limits_{-\infty}^{t} \gamma(t-s) f(s) ds,\ f \in \mathcal{P}_F(x) \right\},$$

где t_j – положительные константы, $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$, $|\gamma| \in L^1(0,\infty)$, $\mathcal{P}_F$ – мультиоператор суперпозиции, порожденный мультиотображением $F(t,c)$, удовлетворяющим условиям $(F1)-(F3)$ или (F_L), $(F3)$.

Заметим, что подстановка включения (3) в уравнение (1) ведет к тому, что относительно переменной $z(t) = (x(t), y_1(t), ..., y_m(t))$ задача приводится к каузальному включению типа

$$z'(t) \in \mathcal{Q}(z)(t). \tag{4}$$

Отметим, что существование периодических решений включения (4), а также исследование устойчивости его решений представляет значительный интерес с физикотехнической точки зрения.

3. Периодическая задача для включений с каузальными мультиоператорами

Обозначим C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму в пространстве L^2:

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для определения понятия периодического каузального мультиоператора рассмотрим для $k \in \mathbb{Z}$ следующий оператор сдвига $j_k : L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n) \to L^1((0,T);\mathbb{R}^n) : j_k(f)(t) = f(t+kT)$.

Определение 14. *Каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$ называется T-периодическим, если для каждых $x \in C_T$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполнено $j_k(\mathcal{Q}(x\,|_{[kT-\tau,(k+1)T]})) = \mathcal{Q}(x\,|_{[-\tau,T]})$.*

Для обеспечения периодичности каузальных мультиоператоров в вышеуказанных примерах достаточно полагать, что мультиотображения F являются T-периодичными по первому аргументу: $F(t+T,c) = F(t,c)$ для всех $(t,c) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ и в примере 2 дополнительно считать, что функция $m(t)$ и семейство $K(t,s)$ также T-периодичны:

$$m(t+T) = m(t) \quad \text{для всех } \ t \in \mathbb{R};$$
$$K(t+T, s+T) = K(t,s) \quad \text{для всех } \ -\infty < s \le t < +\infty.$$

Ясно, что условие T-периодичности каузального мультиоператора позволяет рассматривать его только на пространстве $C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$.

Сформулируем теперь основную задачу:

Для заданного T-периодического каузального мультиоператора $\mathcal{Q}$ найти решение следующего операторного включения:

$$x' \in \mathcal{Q}(x), \tag{5}$$

где $x \in C_T$ – абсолютно непрерывная функция.

3.1. Случай выпуклозначного каузального мультиоператора

Обозначим L^1_T пространство суммируемых T-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. В этом разделе предполагаем, что T-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : C_T \to Cv(L^1_T)$ имеет выпуклые значения и удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{Q}1$) для любого ограниченного линейного оператора $A : L^1_T \to E$, где E – банахово пространство, композиция $A \circ \mathcal{Q} : C_T \to Cv(E)$ - замкнутый мультиоператор;

($\mathcal{Q}2$) существует неотрицательная T-периодическая суммируемая функция $\alpha(t)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(x)(t)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x(t)\|) \text{ п.в. } t \in \mathbb{R},$$

для каждой функции $x \in C_T$.

Для обеспечения условия ($\mathcal{Q}1$) в примерах 1 и 2 достаточно предполагать, что помимо вышеуказанных условий периодичности, мультиотображение F удовлетворяет условиям $(F1)$ – $(F3)$ (см. [16], теорема 1.5.30), а для выполнения условия ($\mathcal{Q}2$) можно предположить в примере 1 выполненным условие подлинейного роста, а в примере 2 следующее условие глобальной интегральной ограниченности

$$\|F(t, c)\| \leq \gamma(t) \text{ п.в. } t \in [0, T]$$

для некоторой неотрицательной суммируемой функции $\gamma(t)$.

Для изучения периодической задачи (5) используется теорема о точке совпадения для линейного фредгольмова оператора и многозначного отображения. Введем необходимые обозначения.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства; $U \subset E_1$ – ограниченное открытое множество; $l : \mathrm{Dom}\ l \subseteq E_1 \to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\mathrm{Im}\ l \subset E_2$ замкнуто.

Рассмотрим непрерывные линейные операторы проектирования $p : E_1 \to E_1$ и $q : E_2 \to E_2$ такие, что $\mathrm{Im}\ p = \mathrm{Ker}\ l$, $\mathrm{Im}\ l = \mathrm{Ker}\ q$. Символом l_p обозначим сужение оператора l на $\mathrm{Dom}\ l \cap \mathrm{Ker}\ p$.

Далее, пусть непрерывный оператор $k_{p,q} : E_2 \to \mathrm{Dom}\ l \cap \mathrm{Ker}\ p$ определен соотношением $k_{p,q}(y) = l_p^{-1}(y - q(y))$, $y \in E_2$; канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \to E_2/\mathrm{Im}\ l$ имеет вид $\pi(y) = y + \mathrm{Im}\ l$, $y \in E_2$; и $\phi : \mathrm{Coker}\ l \to \mathrm{Ker}\ l$ - непрерывный линейный изоморфизм.

Пусть $\mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_2)$ замкнутое мультиотображение такое, что

(a) $\mathcal{G}(U)$ – ограниченное подмножество E_2;

(b) мультиотображение $k_{p,q} \circ \mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_1)$ компактно и полунепрерывно сверху.

Справедливо следующее утверждение [24, лемма 13.1].

Лемма 2. *Пусть*

(i) $l(x) \notin \lambda\mathcal{G}(x)$ *для всех* $\lambda \in (0, 1]$, $x \in \mathrm{Dom}\ l \cap \partial U$*;*

(ii) $0 \notin \pi\mathcal{G}(x)$ *для всех* $x \in \mathrm{Ker}\ l \cap \partial U$*;*

(iii) $\deg_{\mathrm{Ker}\ l}(\phi\pi\mathcal{G}|_{\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}}, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) \neq 0$, *где символ* $\deg_{\mathrm{Ker}\ l}$ *обозначает топологическую степень многозначного векторного поля, вычисляемую в пространстве* $\mathrm{Ker}\ l$, *и* $\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l} = \overline{U} \cap \mathrm{Ker}\ l$.

Тогда l и $\mathcal{G}$ имеют точку совпадения в U, т.е. найдется $x \in U$ такое, что $l(x) \in G(x)$.

Напомним теперь некоторые понятия негладкого анализа (см., например, [27]).

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная Кларка $V^0(x;\nu)$ функции $V(\cdot)$ в точке x по направлению ν задается выражением

$$V^0(x;\nu) = \overline{\lim_{\substack{z \to x \\ t \to 0+}}} \frac{V(z+t\nu) - V(z)}{t},$$

где $z \in \mathbb{R}^n$. Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial V(x)$ функции $V(\cdot)$ в точке x определяется следующим образом:

$$\partial V(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle y, \nu \rangle \le V^0(x;\nu) \quad \text{для всех } \ \nu \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Известно, что мультиотображение $\partial V : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения и полунепрерывно сверху (см., например, [27]). В частности, это означает, что для каждой непрерывной функции $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ множество суммируемых сечений мультифункции $t \multimap \partial V(x(t))$ непусто.

Напомним, что локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x,\nu)$ и она совпадает с $V^0(x,\nu)$. Известно, в частности, что выпуклые функции регулярны.

Развивая понятия, введенные в [11, 17, 19], дадим следующие определения.

Определение 15. *Локально липшицева функция V называется невырожденным потенциалом, если найдется $K > 0$ такое, что $0 \notin \partial V(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \ge K$.*

Если функция V является невырожденным потенциалом, то топологическая степень многозначного векторного поля ∂V одна и та же на всех шарах $B_{K'}$ с центром в нуле радиуса $K' \ge K$. Это общее значение называется топологическим индексом V и обозначается $\operatorname{Ind} V$.

Определение 16. *Регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется строгой негладкой интегральной направляющей функцией для включения (5), если найдется $N > 0$ такое, что*

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s) \rangle \, ds > 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{Q}(x), \tag{6}$$

для всех суммируемых сечений $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$ и каждой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \ge N$ и $\|x'(t)\| \le \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0,T]$.

Теорема 1. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – строгая негладкая интегральная направляющая функция задачи (5) с T-периодическим каузальным оператором $\mathcal{Q}$, удовлетворяющим условиям $(\mathcal{Q}1)$ – $(\mathcal{Q}2)$ такая, что $\operatorname{Ind} V \ne 0$. Тогда задача (5) имеет решение.*

Замечание 3. Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна или удовлетворяет условию коэрцитивности, т.е. $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = \pm\infty$.

Для доказательства теоремы понадобится следующее утверждение (см. [22]).

Лемма 3. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная функция, $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $V(x(t))$ также является абсолютно непрерывной, и справедливо следующее равенство:*

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V^0(x(s), x'(s))ds, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Сведем задачу к лемме 2, обосновав разрешимость следующего операторного включения

$$lx \in \mathcal{Q}(x), \tag{7}$$

где $l : \mathrm{Dom}\ l := \{x \in C_T : x \text{ абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда $\mathrm{Ker}\ l = \mathbb{R}^n$, проекция $\pi : L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой $\pi f = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\,ds$, и мультиоператоры $\pi\mathcal{Q}$ и $k_{p,q}\mathcal{Q}$ выпуклозначны и компактны на ограниченных подмножествах.

Пусть для некоторого $\lambda \in (0,1]$ функция $x \in \mathrm{Dom}\ l$ является решением включения

$$l(x) \in \lambda\mathcal{Q}(x).$$

Это означает, что $x(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0,T]$, для некоторого $f \in \mathcal{Q}(x)$. Предположим, что $\|x\|_2 \geq N$.

Тогда, с одной стороны, используя (6), имеем

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), \lambda f(s)\rangle\, ds > 0$$

для каждого суммируемого сечения $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$.

С другой стороны, применяя лемму 3, получаем

$$\int\limits_0^T \langle \upsilon(s), \lambda f(s)\rangle\, ds = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T \langle \upsilon(s), x'(s)\rangle\, ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^T V^0(x(s), x'(s))\, ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

для каждого суммируемого сечения $\upsilon(s) \in \partial V(x(s))$.

Из полученного противоречия следует, что $\|x\|_2 < N$. Но тогда найдется и $M > 0$ такое, что $\|x\|_C < M$. В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ с центром в нуле и радиуса $r = \max\{M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda\mathcal{Q}(x)$$

для всех $x \in \partial U,\ \lambda \in (0,1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \mathrm{Ker}\ l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geq NT^{-1/2}$, из определения строгой негладкой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), f(s)\rangle ds > 0$$

для каждого суммируемого сечения $v(s) \in \partial V(u)$ и $f(s) \in \mathcal{Q}(u)$. Но, полагая $v(s) \equiv v$, получаем

$$\int_0^T \langle v, f(s) \rangle ds = \langle v, \int_0^T f(s) ds \rangle = T \langle v, \pi f \rangle > 0$$

и, следовательно, $\langle v, y \rangle > 0$ для всех $v \in \partial V(u)$, $y \in \pi\mathcal{Q}(u)$.

Это означает, что $0 \notin \pi\mathcal{Q}(u)$ и мультиполя $\partial V(u)$ и $\pi\mathcal{Q}(u)$ не допускают противоположных направлений для $u \in \partial U \cap \mathrm{Ker}\ l$ и, следовательно, они гомотопны на $\partial U \cap \mathrm{Ker}\ l$. По свойству гомотопической инвариантности тогда имеем

$$\deg(\pi\mathcal{Q}\big|_{\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}}, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) = \deg(\partial V, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l} = \overline{U} \cap \mathrm{Ker}\ l$. Таким образом, все условия леммы 2 выполнены и задача (7), а, следовательно, и задача (5) имеют решение. □

3.2. Случай полунепрерывного снизу каузального мультиоператора

Теперь рассмотрим периодическую задачу для класса включений с невыпуклозначными полунепрерывными снизу каузальными мультиоператорами. Именно, будем предполагать, что T-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : C_T \to P(L_T^1)$ удовлетворяет условию

($\mathcal{Q}_L$) $\mathcal{Q}$ полунепрерывен снизу и имеет замкнутые разложимые значения

и условию ($\mathcal{Q}2$).

В качестве примера каузального мультиоператора, удовлетворяющего условиям ($\mathcal{Q}_L$) и ($\mathcal{Q}2$) можно рассмотреть суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F$, порожденный T-периодическим по первому аргументу мультиотображением $F : \mathbb{R}\times\mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющим условию почти полунепрерывности снизу (F_L) и условию подлинейного роста.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{Q} : C_T \to P(L_T^1)$ – T-периодический каузальный оператор, удовлетворяющий условиям ($\mathcal{Q}_L$) и ($\mathcal{Q}2$) и $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – строгая негладкая интегральная направляющая функция для соответствующей задачи* (5) *такая, что*

$$\mathrm{Ind}\ V \neq 0.$$

Тогда задача (5) имеет решение.

Доказательство. Применяя лемму 2, найдем непрерывное сечение $q : C_T \to L_T^1$ мультиоператора $\mathcal{Q}$. Для отображения q имеем соотношение

$$\int_0^T \langle v(s), q(x)(s) \rangle\, ds > 0$$

для всех суммируемых сечений $v(s) \in \partial V(x(s))$ и для каждой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теперь, применяя «однозначную» версию леммы 2 (т.е. заменяя мультиотображение $\mathcal{G}$ непрерывным отображением g) и применяя аналогичные приведенным выше рассуждения, получим решение x следующего уравнения

$$l(x) = q(x),$$

которое является решением задачи (5). □

4. Пример

Рассмотрим периодическую задачу для управляемой системы, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением следующего вида:

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x_t) \tag{8}$$

$$x(0) = x(T). \tag{9}$$

Здесь $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, а мультиотображение $F : \mathbb{R} \times C \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию T-периодичности по первому аргументу и условиям (F_1) – (F_3) примера 1 пункта 1. Тогда определен мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F : C\left([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n\right) \multimap L^1\left((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n\right),$$

удовлетворяющий условию $(\mathcal{Q}1)$ (см. [16, теорема 1.5.10]). Для выполнения условия $(\mathcal{Q}2)$ предполагается справедливость условия подлинейного роста для мультиотображения F.

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет следующий вид: $V(x) = \frac{\|x\|^2}{2} + \widetilde{V}(x)$, где $\widetilde{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная функция такая, что V удовлетворяет условию коэрцитивности. Ясно, что V является регулярной функцией и

$$\partial V(x) = x + \partial \widetilde{V}(x)$$

(см. [27, следствие 3 из теоремы 2.3.3]).

Предположим, что для некоторого $N > 0$ и каждой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{P}_F(x)\|$, для всех $y \in \mathcal{P}_F(x)$, $\widetilde{v} \in \partial\widetilde{V}(x)$, $t \in [0, T]$ выполнены условия:

H1) $\langle Ax, \widetilde{v} \rangle \geq \langle \widetilde{v}, x \rangle$;

H2) $\langle \widetilde{v}, y \rangle \geq \langle \widetilde{v}, x \rangle$.

Применение теоремы 1 позволяет получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть квадратичная форма $\langle Ax, x \rangle$ удовлетворяет для некоторого $\varepsilon > 0$ условию*

$$\langle Ax, x \rangle \geq \varepsilon \|x\|^2$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если

$$\overline{\lim_{\|x\|_2 \to +\infty}} \frac{\|\mathcal{P}_F(x)\|_2}{\|x\|_2} < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad \overline{\lim_{\|x\|_2 \to +\infty}} \frac{\|\partial\widetilde{V}(x)\|_2}{\|x\|_2} < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

для всех абсолютно непрерывных $x \in C_T$, где

$$\|\mathcal{P}_F(x)\|_2 = \sup_{y \in \mathcal{P}_F(x)} \|y\|_2, \quad \|\partial\widetilde{V}(x)\|_2 = \sup_{\widetilde{v} \in \partial\widetilde{V}(x)} \|\widetilde{v}\|_2,$$

то задача (8), (9) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что функция V является строгой негладкой интегральной направляющей функцией для включения (8). Отметим, что каждое $\upsilon \in \partial V(x)$ имеет вид

$$\upsilon = x + \widetilde{\upsilon},$$

где $\widetilde{\upsilon} \in \partial\widetilde{V}(x)$.

Действительно, для произвольных $y \in \mathcal{P}_F(x)$, $\upsilon \in \partial V(x)$ согласно $(H1), (H2)$ имеем

$$\int_0^T \langle \upsilon(s), Ax(s) + y(s) \rangle \, ds = \int_0^T \langle x(s) + \widetilde{\upsilon}(s), Ax(s) + y(s) \rangle \, ds =$$

$$= \int_0^T \langle Ax(s), x(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle Ax(s), \widetilde{\upsilon}(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle x(s), y(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle \widetilde{\upsilon}(s), y(s) \rangle \, ds \geq$$

$$\geq \int_0^T \langle Ax(s), x(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle \widetilde{\upsilon}(s), x(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle x(s), y(s) \rangle \, ds + \int_0^T \langle \widetilde{\upsilon}(s), x(s) \rangle \, ds \geq$$

$$\geq \varepsilon \|x\|_2^2 - \|x\|_2 \|\partial\widetilde{V}(x)\|_2 - \|x\|_2 \|P_F(x)\|_2 - \|x\|_2 \|\partial\widetilde{V}(x)\|_2 > 0$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

Автор искренне благодарен профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14–01–00468, 16-01-00386), РФФИ-Тайвань (грант 14–01–92004) и Российского научного фонда (грант 14–21–00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Литература / References

1. Tonelli, L. Sulle equazioni funzionali di Volterra / L. Tonelli // Bulletin of Calcutta Mathematical Society. – 1930. – V. 20. – P. 31–48.
2. Тихонов, А.Н. О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики / А.Н. Тихонов // Бюллетень МГУ. Секция А. Серия: математика и механика. – 1938. – Т. 1, вып. 8. – С. 1–25. [Tihonov A.N. On Functional Equations of Volterra Type and Their Applications to Some Problems of Mathematical Physic. *Bulletin of the Moscow State University. Section A. Series: Mathematics and Mechanics*, 1938, vol. 1, issue 8, pp. 1–25. (in Russian)]
3. Corduneanu, C. Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications / C. Corduneanu. – London: Taylor and Francis, 2002.
4. Drici, Z. Differential Equations with Causal Operators in a Banach Space / Z. Drici, F.A. McRae, Devi J. Vasundhara // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 62, № 2. – P. 301–313.
5. Drici, Z. Monotone Iterative Technique for Periodic Boundary Value Problems with Causal Operators / Z. Drici, F.A. McRae, D.J. Vasundhara // Nonlinear Analysis. – 2006. – V. 64, № 6. – P. 1271–1277.
6. Jankowski, T. Boundary Value Problems with Causal Operators / T. Jankowski // Nonlinear Analysis. – 2008. – V. 68, № 12. – P. 3625–3632.
7. Lupulescu, V. Causal Functional Differential Equations in Banach Spaces / V. Lupulescu // Nonlinear Analysis. – 2008. – V. 69, № 12. – P. 4787–4795.

8. Бурлаков, Е.О. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами / Е.О. Бурлаков, Е.С. Жуковский // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 8. – С. 16–29. [Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S. The Continuous Dependence of Solutions to Volterra Equations with Locally Contracting Operators on Parameters. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2010, no. 8, pp. 12–23. DOI: 10.3103/S1066369X10080025]
9. Жуковский, Е.С. Корректность уравнений с обобщенно вольтерровыми отображениями метрических пространств / Е.С. Жуковский, Т.В. Жуковская, М.Ж. Алвеш // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15, вып. 6. – С. 1669–1672. [Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy T.V., Alves M.J. Correctness of Equations with Generalized Volterra Maps of Metric Spaces. *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2010, vol. 15, issue 6, pp. 1669–1672. (in Russian)]
10. Obukhovskii, V. On Certain Classes of Functional Inclusions with Causal Operators in Banach Spaces / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Analysis. – 2011. – V. 74, № 8. – P. 2765–2777.
11. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. [Krasnosel'skii M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravneniy* [The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1966. 332 p.]
12. Красносельский, М.А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский, А.И. Перов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 123, № 2. – С. 235–238. [Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. On Existence Principle for Bounded, Periodic and Almost Periodic Solutions to the Systems of Ordinary Differential Equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235–238.(in Russian)]
13. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. [Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. *Geometricheskie metody nelineynogo analiza* [Geometrical Methods of Nonlinear Analysis]. Moscow, Nauka, 1975. 512 p.]
14. Mawhin, J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 40. American Mathematical Society / J. Mawhin. – Providence, 1979. DOI: 10.1090/cbms/040
15. Mawhin, J. Guiding-like Functions for Periodic or Bounded Solutions of Ordinary Differential Equations / J. Mawhin, J.R. Ward // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2002. – V. 8, № 1. – P. 39–54.
16. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. – Изд. 2-е. – М.: Либроком, 2011. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrageniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions]. Moscow, Librokom, 2011. 226 p.]
17. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Górniewicz. – Berlin: Springer, 2006.
18. Fonda, A. Guiding Functions and Periodic Solutions to Functional Differential Equations / A. Fonda // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1987. – V. 99, № 1. – P. 79–85.
19. Kornev, S. On Some Developments of the Method of Integral Guiding Functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. – 2005. – V. 12, № 3-4. – P. 303–310.
20. Loi, N.V. On the Global Bifurcation of Periodic Solutions of Differential Inclusions in Hilbert Spaces / N.V. Loi, V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Analysis. – 2013. – V. 76. – P. 80–92.

21. Kornev, S. On Asymptotics of Solutions for a Class of Functional Differential Inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J.C. Yao // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. – 2014. – V. 34, issue 2. – P. 219–227.
22. Корнев, С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 700–705. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On Asymptotic Behavior of Solutions of Differential Inclusions and the Method of Guiding Functions. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 711–716. DOI: 10.1134/S0012266115060014]
23. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. / V. Obukhovskii, P. Zecca, N.V. Loi, S. Kornev. – Berlin: Springer, 2013.
24. Deimling, K. Multivalued Differential Equations / K. Deimling. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1992. DOI: 10.1515/9783110874228
25. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 2001. DOI: 10.1515/9783110870893
26. Fryszkowski, A. Fixed Point Theory for Decomposable Sets / A. Fryszkowski. – Dordrecht: Kluwer AP, 2004. DOI: 10.1007/1-4020-2499-1
27. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. – М.: Наука, 1988. [Clark F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, 1983. 308 p.]

Сергей Викторович Корнев, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), kornev_vrn@rambler.ru.

Поступила в редакцию 28 апреля 2016 г.

MSC 34K13 **DOI: 10.14529/mmp160205**

Method of Nonsmooth Integral Guiding Functions in Periodic Solutions Problem for Inclusions with Causal Multioperators

S.V. Kornev, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation, kornev_vrn@rambler.ru

As it is known, differential inclusions are very useful mathematical tools to describe nonlinear control systems with feedback, automatic control systems, discontinuous systems, impulse response and other objects of modern engineering, mechanics, physics. In the present paper the new method to solving the problem of periodic oscillations of controlled systems described by a differential inclusion with a causal multioperator is introduced. Firstly differential equations with causal operator, or Volterra type equations where considered by L. Tonelli and A.N. Tikhonov. A.N. Tikhonov used them as the model in study of some thermal conductivity problems, in particular the problem of body coding when there is radiation from its surface. At first we consider the case when the multioperator is closed and convex-valued. Then the case of a non-convex-valued and lower semicontinuous right-hand part is considered. As the main research tool of the problem in both cases a modified method of the classical guiding function is applied. Namely, the method of nonsmooth integral guiding function is considered. Application of topological degree theory and this method allows to establish the solvability of periodic problem in each of the cases.

Keywords: inclusion; causal multioperator; periodic solutions; nonsmooth integral guiding function; topological degree.

Received April 28, 2016