

# АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОСЪЕМА С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛАМИНАРНО ДВИЖУЩИМСЯ ХЛАДАГЕНТОМ ЧЕРЕЗ СОПРЯЖЕННУЮ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

*В.И. Ряжских, Д.А. Коновалов, М.И. Слюсарев, И.Г. Дроздов*

Предложена математическая модель конвективного теплообмена в плоском пористом канале при ламинарном течении ньютоновской среды в виде краевой задачи для сопряженных уравнений Дарси – Бринкмана – Форчхеймера в приближении Дарси – Бринкмана и переноса теплоты в форме Шуманна при тепловых граничных условиях второго рода. Методом интегральных преобразований получено аналитическое решение уравнений модели для расчета термических и гидродинамических полей. Это позволило найти точные соотношения для длины начального гидродинамического участка, коэффициента гидравлического сопротивления трения по Фаннингу, идентифицировать локальные характеристики температурных полей жидкой фазы и пористого скелета в зависимости от пористости, а также оценить локальные числа Нуссельта и определить область эффективного теплообмена. Полученные данные не противоречат классическим результатам.

*Ключевые слова:* пористые среды; теплообмен; плоский канал; гидравлическое сопротивление; начальный гидродинамический участок.

## Введение

Появление компактных энергонапряженных элементов систем различного предметного назначения вызвало необходимость их эффективного охлаждения с целью стабилизации температурного режима, обеспечивающего заданные эксплуатационные характеристики [1]. Решение этой проблемы базируется на использовании различных методов интенсификации теплообмена [2], но наибольшее применение нашли пористые среды [3] в силу высоких значений коэффициента теплопередачи.

Физическая модель пористых сред, как правило, представляется в виде плотной упаковки сфер [4], пустоты которой соединены между собой и заполнены жидкостью, причем присутствуют только две фазы – жидкость и пористый недеформируемый скелет.

Гидродинамика пористого слоя описывается обобщенной феноменологической моделью Дарси – Бринкмана – Форчхеймера в форме Ксу – Ченга [5]:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \tau} + \frac{(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}}{\varepsilon} \right] = \rho_f \bar{g} - \nabla p + \mu_f \nabla^2 \bar{V} - \left[ \mu_f \frac{\bar{V}}{K} + \rho_f \frac{b \bar{V} |\bar{V}|}{\sqrt{K}} \right]; \quad (2)$$

где  $\tau$  – время;  $\rho_f$ ,  $\mu_f$  – плотность и динамическая вязкость жидкости;  $\varepsilon$  – доля свободного объема (пористость);  $\bar{V}$  – вектор скорости жидкости;  $\bar{g}$  – вектор ускорения свободного падения;  $p$  – давление. Проницаемость пористой среды определяется из модифицированного соотношения Козени – Кармана [6].

$$K = \varepsilon^2 d_p^2 / [150 (1 - \varepsilon)], \quad (3)$$

фактор трения Форчхеймера равен

$$b \approx 0,0117d_p / (1 - \varepsilon), \quad (4)$$

где  $d_p$  – среднечисленный диаметр сферических частиц в пористом слое.

Уравнение энергии обычно записывается для каждой фазы (двухтемпературная модель) в форме Шуманна [7]:

для жидкости

$$\varepsilon(\rho c_p)_f \frac{\partial t_f}{\partial \tau} + \varepsilon(\rho c_p)_f \bar{V} \cdot \nabla t_f = \nabla \cdot (\lambda_e^f \cdot \nabla t_f) \pm \alpha_{sf} a_{sf} (t_s - t_f); \quad (5)$$

для скелета

$$(1 - \varepsilon)(\rho c_p)_s \frac{\partial t_s}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda_e^s \cdot \nabla t_s) \mp \alpha_{sf} a_{sf} (t_s - t_f), \quad (6)$$

где  $\lambda_e^f, \lambda_e^s$  – тензоры эффективных коэффициентов теплопроводности жидкости и скелета;  $t_f, t_s$  – температуры жидкости и скелета;  $\alpha_{sf}$  – коэффициент теплоотдачи между жидкой фазой и матрицей пористого скелета;  $a_{sf}$  – удельная площадь смоченной поверхности в пористом теле;  $\rho_s, c_{ps}$  – плотность и удельная массовая теплоемкость скелета пористого тела;  $c_{pf}$  – удельная массовая теплоемкость жидкости.

Уравнения (1), (2), (5) и (6) получены методом объемного осреднения [4].

Если теплофизические параметры в (5) и (6) однородны по пространственным координатам и не зависят от температуры, то их, как показано в [8], можно вычислить из соотношений:

$$a_{sf} = b(1 - \varepsilon) / d_p; \quad (7)$$

$$\alpha_{sf} = \lambda_f \left[ 2 + 1,1 \text{Pr}^{*1/3} (\rho_f |\bar{V}| d_p / \mu_f)^{0,6} \right] / d_p, \quad (8)$$

где  $\text{Pr}^* = \mu_f c_{pf} / \lambda_f$ ;  $\lambda_f$  – теплопроводность жидкости;

$$\lambda_e^f = \left[ \varepsilon + (0,1 \div 0,5) \text{Pr} \left( \frac{\rho_f |\bar{V}| d_p}{\mu_f} \right) \right] \lambda_f; \quad (9)$$

$$\lambda_e^s = (1 - \varepsilon) \lambda_s, \quad (10)$$

где  $\lambda_s$  – теплопроводность скелета пористого тела.

Учитывая феноменологический характер модели в пористом слое постановка граничных условий осуществляется в рамках классического анализа задач теплопереноса для гомогенных сред [9].

Плоская геометрия охлаждаемых тепловыделяющих элементов конструктивно обуславливает такую же геометрию пористых теплообменников, поэтому большинство исследований сосредоточилось на анализе плоских теплообменников с тепловыми граничными условиями первого и второго рода со стороны охлаждаемой поверхности [10]. Даже в такой простой геометрической постановке интегрирование системы (1), (2) и (5), (6) вызывает такие же затруднения, как и при совместном интегрировании уравнений Навье – Стокса и теплопереноса [11]. Подробный обзор численных и приближенных аналитических способов решения системы (1), (2) и (5), (6) при

различных граничных условиях для плоской геометрии приведен в [12], где анализируется эффективность спектра конечно-разностных и конечно-элементных методов, а также новая технология получения приближенных решений в аналитическом виде – гомотопно-пертурбационный метод.

Однако во всех конкретных формулировках объявленной задачи гидродинамическим начальным участком пренебрегают на основании метода анализа размерностей без указания конкретных зависимостей, связывающих геометрические, гидродинамические и теплофизические характеристики пористой среды [13]. Отсутствие таких данных приводит к выбору заведомо завышенных значений длины начального гидродинамического участка, например в [14]. Поэтому в данной работе такая зависимость идентифицируется в широком диапазоне основных параметров при ламинарном течении теплоносителя в рамках Бринкмановского приближения модели Дарси – Бринкмана – Форчхеймера и находятся условия, при которых влиянием длины гидродинамического начального участка на теплопередачу можно пренебречь.

## 1. Математическая модель

Характерной особенностью при оформлении конструкции плоского пористого теплообменника является существенное превышение ширины над высотой его поперечного сечения, что позволяет рассматривать проточную область как плоский канал в 2D декартовой системе координат (рис. 1).

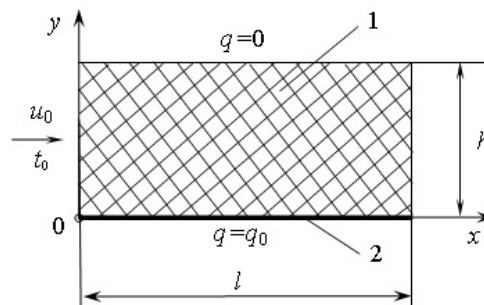


Рис. 1. Расчетная схема: 1 – пористое тело; 2 – тепловыделяющий элемент

Пусть однородный по сечению поток теплоносителя с температурой  $t_0$  и со скоростью  $u_0$  подается на вход теплообменника высотой  $h$  и длиной  $l$ . Полагаем стенки теплообменника непроницаемыми для теплоносителя, причем верхняя – теплоизолирована, а на нижней задан тепловой поток  $q_0$ . Согласно принятой расчетной схеме уравнения (1), (2) и (5), (6) в безразмерной форме записи имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \theta} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \left( \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Da}} U + \frac{B}{\sqrt{\text{Da}}} U \sqrt{U^2 + V^2} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial \theta} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \left( \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Da}} V + \frac{B}{\sqrt{\text{Da}}} V \sqrt{U^2 + V^2} \right); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial T_f}{\partial \theta} + U \frac{\partial T_f}{\partial X} + V \frac{\partial T_f}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial Y^2} \right) + \frac{\text{Nu}_p \cdot \text{Re}}{\text{Pr} \cdot \text{Re}_p^2} (\Lambda T_s - T_f); \quad (14)$$

$$(1 - \varepsilon) A_{sf} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Re} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial Y^2} - \text{Nu}_p \cdot \left( \frac{\text{Re}}{\text{Re}_p} \right)^2 (\Lambda T_s - T_f), \quad (15)$$

где  $\theta = u_0 \tau / (\varepsilon h)$ ;  $X = x/h$ ;  $Y = y/h$ ;  $U = u/u_0$ ;  $V = \nu/u_0$ ;  $u, \nu$  – компоненты вектора скорости жидкости  $\vec{V}$ ;  $P = \varepsilon^2 p / (\rho_f u_0^2)$ ;  $B = \varepsilon^2 b$ ;  $T_f = \lambda_e^f (t_f - t_0) / (q_0 h)$ ;  $T_s = \lambda_e^s (t_s - t_0) / (q_0 h)$ ;  $\Lambda = \lambda_e^f / \lambda_e^s$ ;  $\text{Re} = p_f u_0 h / (\mu_f \varepsilon^2)$  – число Рейнольдса;  $\text{Re}_p = \rho_f u_0 d_p / [6(1 - \varepsilon) \mu_f]$  – локальное число Рейнольдса;  $\text{Da} = K/h^2$  – число Дарси;  $\text{Pr} = \varepsilon (\rho c_p)_f \mu_f / (\lambda_e^f \rho_f)$  – число Прандтля;  $\text{Nu}_p = \alpha_{sf} d_p / \lambda_e^f$  – локальное число Нуссельта;  $A_{sf} = \left[ \lambda_e^f / (\rho c_p)_f \right] / \left[ \lambda_e^s / (\rho c_p)_s \right]$  – критерий, характеризующий диффузию теплоты в жидкости относительно диффузии теплоты в скелете пористой среды.

Ламинарное течение теплоносителя позволяет принять гипотезу однонаправленности ( $V \equiv 0, \partial P / \partial Y = \text{const}$ ), а также пренебречь инерционными эффектами при падении давления в пористом слое, что экспериментально подтверждено в [15]. Применение погранслойной линеаризации [16] с учетом связи  $\theta = X/\varepsilon$  сводит гидродинамическую подзадачу (11) – (13) к начально-краевой задаче для параболического уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dP}{dX} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{U}{\varepsilon \text{Re} \cdot \text{Da}} \quad (16)$$

с граничными условиями

$$U(0, Y) = 1; U(X, 0) = U(X, 1) = 0, \quad (17)$$

где  $dP/dX$  определяется из сохранения расхода жидкости через поперечное сечение пористого канала

$$\int_0^1 U(X, Y) dY = 1. \quad (18)$$

Из (16) – (18) следует упрощение теплообменной подзадачи (14), (15) с учетом того, что диффузия теплоты в поперечном направлении пористого слоя существенно больше, чем в продольном ( $\partial^2 T_{f,s} / \partial Y^2 \gg \partial^2 T_{f,s} / \partial X^2$ ) [17]:

$$U \frac{\partial T_f}{\partial X} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial^2 T_f}{\partial Y^2} + \frac{\text{Nu}_p \cdot \text{Re}}{\text{Pr} \cdot \text{Re}_p^2} (\Lambda T_s - T_f); \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial Y^2} = \text{Nu}_p \cdot \left( \frac{\text{Re}}{\text{Re}_p} \right)^2 \cdot (\Lambda T_s - T_f), \quad (20)$$

с тепловыми граничными условиями, отвечающими постановке задачи

$$T_f(0, Y) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial T_f(X, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial T_s(X, 0)}{\partial Y} = -1; \quad (22)$$

$$\frac{\partial T_f(X, 1)}{\partial Y} = \frac{\partial T_s(X, 1)}{\partial Y} = 0. \quad (23)$$

Заметим, что полученная модель (16) – (23) может быть проанализирована последовательно, т.е. сначала гидродинамическая подзадача, а затем тепловая.

## 2. Гидродинамическая подзадача

Линейность системы (16), (17) позволяет использовать одностороннее преобразование Лапласа [18] по переменной  $X$  и получить аналитическое выражение для безразмерной скорости

$$U(X, Y) = C\varepsilon\text{Re} \cdot \text{Da} \left\langle 1 - \left\{ \text{sh} \left( Y\text{Da}^{-1/2} \right) + \text{sh} \left[ (1 - Y)\text{Da}^{-1/2} \right] \right\} / \text{sh} \text{Da}^{-1/2} \right\rangle + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{C\varepsilon\text{Re}}{\text{Da}^{-1} + \mu_n^2} - 1 \right) \{ \sin(\mu_n Y) + \sin[\mu_n(1 - Y)] \} \times \\ \times \exp \left( - \frac{\text{Da}^{-1} + \mu_n^2}{\varepsilon \text{Re}} X \right) / (\mu_n \cos \mu_n - \sin \mu_n), \quad (24)$$

где  $C = -\varepsilon^{-1}dP/dX$ ,  $\mu_n = \pi n$ . Из (18) при  $X \rightarrow \infty$  (полностью развитое течение) найдем

$$C = \left\{ \varepsilon\text{Re} \cdot \text{Da} \left[ 1 - \frac{2 \left( \text{chDa}^{-1/2} - 1 \right)}{\text{Da}^{-1/2} \text{shDa}^{-1/2}} \right] \right\}^{-1}, \quad (25)$$

откуда коэффициент гидравлического сопротивления по Фаннингу [19] есть

$$\xi = 4 \left\{ \varepsilon^2\text{Re} \cdot \text{Da} \left[ 1 - \frac{2 \left( \text{chDa}^{-1/2} - 1 \right)}{\text{Da}^{-1/2} \text{shDa}^{-1/2}} \right] \right\}^{-1}. \quad (26)$$

Отметим, что при отсутствии пористого скелета ( $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $\text{Da} \rightarrow \infty$ ) коэффициент сопротивления совпадает со значением при ламинарном течении ньютоновской жидкости в плоском канале [20].

Длина начального гидродинамического участка определена из условия

$$\frac{U(\infty, 1/2) - U(X, 1/2)}{U(\infty, 1/2)} = 0,03,$$

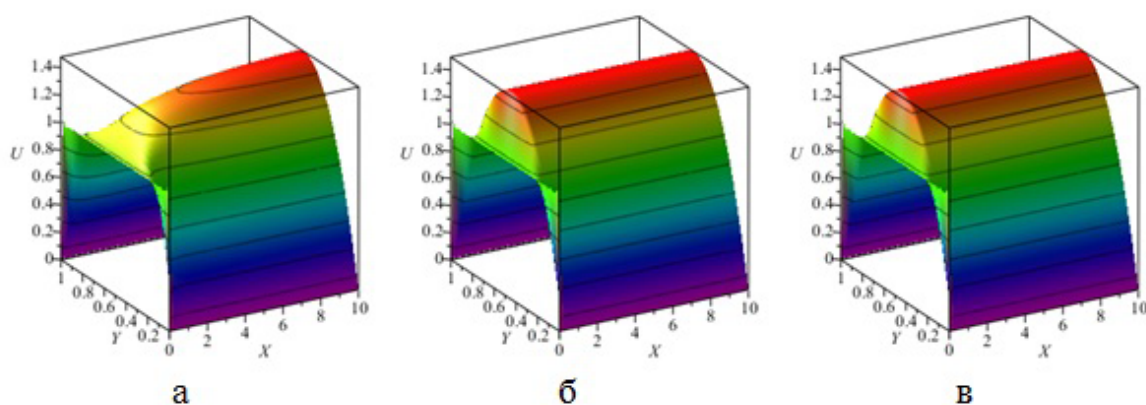
ограничиваясь первым членом ряда в (24)

$$X = - \frac{\varepsilon\text{Re}}{\text{Da}^{-1} + \pi^2} \ln \left\{ \frac{5 \cdot 10^{-3} C\varepsilon\text{Re} \cdot \text{Da} \left[ 1 - \frac{2\text{sh}(\text{Da}^{-1/2}/2)}{\text{shDa}^{-1/2}} \right]}{\frac{C\varepsilon\text{Re}}{\text{Da}^{-1} + \pi^2} - 1} \right\}, \quad (27)$$

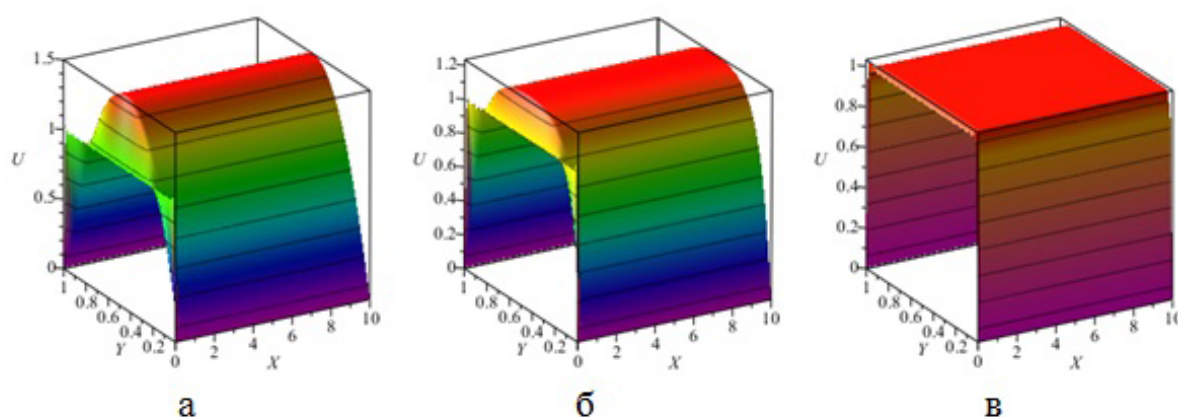
откуда, с учетом (25) следует, что длина начального участка при течении в пористой среде пропорциональна числу Рейнольдса и ширине плоского канала, а в пределе, когда  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $\text{Da} \rightarrow \infty$ , получается классический результат  $X = 0,18\text{Re}$  [21].

Как и следовало ожидать, снижение числа  $\text{Re}$  при  $\text{Da} = \text{const}$  и  $\varepsilon = \text{const}$  нивелирует влияние условий входа на поле скоростей (рис. 2), также как и уменьшение числа  $\text{Da}$  при  $\text{Re} = \text{const}$  и  $\varepsilon = \text{const}$  (рис. 3).

В практически важном диапазоне пористости  $\varepsilon = 0,1 \div 0,5$  заметного изменения структуры поля скорости при различных  $\text{Re}$  и  $\text{Da}$  не наблюдается. Однако влияние



**Рис. 2.** Поле скоростей в плоском пористом канале при  $\varepsilon=0,4$ ;  $Da=1$  и различных числах  $Re$ : а – 100; б – 1; в – 0,01



**Рис. 3.** Поле скоростей в плоском пористом канале при  $\varepsilon = 0,4$ ;  $Re = 1$  и различных числах  $Da$ : а – 100; б – 0,01; в –  $1 \cdot 10^{-4}$

уменьшения пористости становится существенным на коэффициент гидравлического сопротивления, увеличивая его значение более чем на порядок (рис. 4) и уменьшая длину начального гидродинамического участка до характерного размера пор  $d_p$  (рис. 5). На рис. 6 проиллюстрировано подтверждение количественной адекватности принятых допущений при синтезе математической модели гидродинамической подзадачи. Эффективность пористых теплообменников проявляется при разумном уменьшении величины проницаемости ( $Da \rightarrow 0$ ) в контексте потерь напора на преодоление сил гидродинамического сопротивления и увеличении площади поверхности теплопередачи между фазами. Но в этом случае профиль скорости течения жидкости в плоском слое по структуре соответствует режиму идеального вытеснения (рис. 3 в), что дает основание упростить тепловую подзадачу, считая в конвективном слагаемом уравнения (19)  $U \approx 1$ .

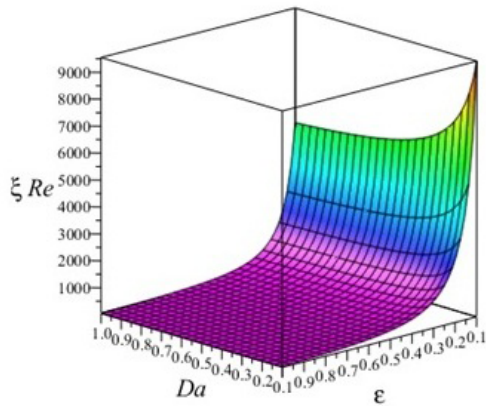


Рис. 4. Коэффициент гидравлического сопротивления, рассчитанный по формуле (26)

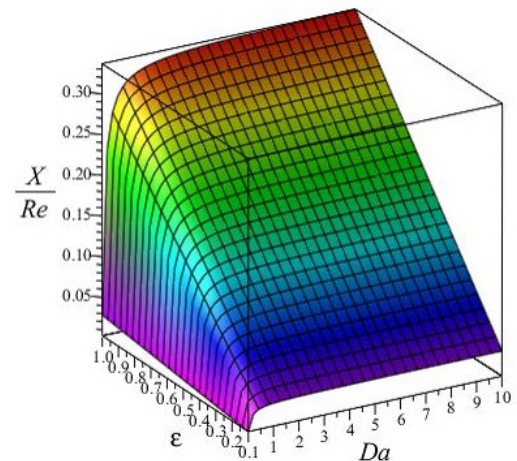


Рис. 5. Длина гидродинамического начального участка, рассчитанная по формуле (27)

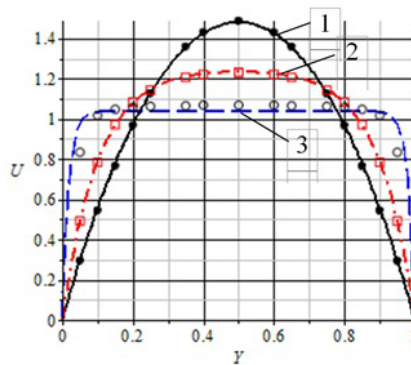


Рис. 6. Профили скоростей в плоском пористом слое при  $X = 20$  и  $Re = 1$  и различных  $Da$ : 1 – 0,3; 2 – 0,01; 3 – 0,00033 (– расчет; о данные из [17])

### 3. Тепловая подзадача

Анализ гидродинамической подзадачи позволил получить аналитические выражения для  $T_f$  и  $T_s$  путем последовательного применения одностороннего преобразования Лапласа по переменной  $X$  и конечного косинус-преобразования Фурье по переменной  $Y$  [22]:

$$T_f(X, Y) = \frac{2}{Pr \cdot Re} \frac{1}{a^f} [1 - \exp(-a^f X)] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^f}{b_k} \cos(\pi k Y) [1 - \exp(-b_k^f X)]; \quad (28)$$

$$T_s(X, Y) = \frac{1}{Nu_p} \cdot \left( \frac{Re_p}{Re} \right)^2 \frac{1}{\Lambda} + \frac{2X}{Pr \cdot Re \cdot \Lambda} +$$

$$+2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ d_k^s + \frac{c_k^s}{b_k} [1 - \exp(-b_k^s X)] \right\} \cos(\pi k Y); \quad (29)$$

где

$$a^f = \frac{Nu_p \cdot Re}{Pr \cdot Re_p} \left( \frac{1}{Re_p} - 1 \right); \quad c_k^f = \frac{\frac{2Nu_p \cdot Re}{Pr \cdot Re_p^2} \Lambda + \frac{\pi^2 k^2}{Pr \cdot Re}}{\pi^2 k^2 + Nu_p \cdot \left( \frac{Re}{Re_p} \right)^2 \Lambda};$$

$$b_k = \frac{\pi^2 k^2}{Pr \cdot Re} + \frac{Nu_p \cdot Re}{Pr \cdot Re_p^2} - \frac{Nu_p^2 Re^3}{Pr \cdot Re_p^4} \Lambda \left[ \pi^2 k^2 + Nu_p \cdot \left( \frac{Re}{Re_p} \right)^2 \Lambda \right]^2;$$

$$c_k^s = Nu_p \cdot \left( \frac{Re}{Re_p} \right)^2 \left( \frac{2Nu_p \cdot Re}{Pr \cdot Re_p^2} \Lambda + \frac{\pi^2 k^2}{Pr \cdot Re} \right) / \left[ \pi^2 k^2 + Nu_p \cdot \left( \frac{Re}{Re_p} \right)^2 \Lambda \right]^2;$$

$$d_k^s = \frac{1}{\pi^2 k^2 + Nu_p \cdot \left( \frac{Re}{Re_p} \right)^2 \Lambda}.$$

Расчетный анализ тепловой подзадачи выполнен для теплоносителя с теплофизическими свойствами, близкими к воде:  $\mu_f = 0,5 \cdot 10^{-3}$  Па·с;  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda_f = 0,68$  Вт/(м·К);  $c_{pf} = 4190$  Дж/(кг·К). Пористый скелет – алюминий с теплопроводностью  $\lambda_s = 211$  Вт/(м·К). Геометрические параметры таковы:  $h=0,01$  м;  $d_p = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м. Скорость теплоносителя выбрана равной  $u_0 = 0,2$  м/с. При таких исходных данных получены следующие результаты.

Уменьшение пористости приводит к более интенсивному охлаждению скелета (рис. 7), причем поле температур существенно неоднородно, т.е. вблизи «горячей» поверхности температура значительно выше температуры около теплоизолированной поверхности. Это объясняется тем, что скорость теплоносителя при меньшей пористости увеличивается в поровом пространстве и, следовательно, его температура уменьшается (рис. 8). Кроме того, наблюдается относительный локальный перегрев теплоносителя в пограничном слое на «горячей» стенке, что может вызвать при определенных условиях фазовый переход в теплоносителе. При значительной длине теплообменника этот перегрев принимает постоянную величину (рис. 9), что свидетельствует о наступлении теплового равновесия между теплоносителем и пористым скелетом.

Вычисленное локальное число Нуссельта (рис. 10)

$$Nu(X) = [T_f(X, 0) - \bar{T}_f(X)]^{-1},$$

где

$$\bar{T}_f(X) = \int_0^1 T_f(X, Y) dY,$$

показывает, что наиболее эффективно пористый теплообменник функционирует при относительной его длине  $\leq 100$ , т.е. на начальном тепловом участке, где значения безразмерного коэффициента теплоотдачи более чем на порядок выше по сравнению с аналогичным теплообменником без пористого скелета [23].



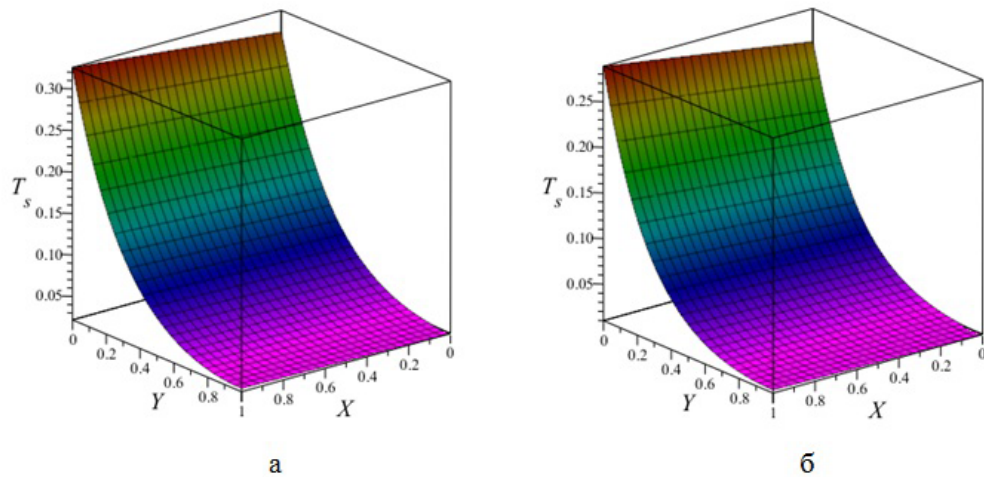


Рис. 7. Поле скоростей в плоском пористом канале при  $\varepsilon=0,4$ ;  $Da=1$  и различных числах  $Re$ : а – 100; б – 1

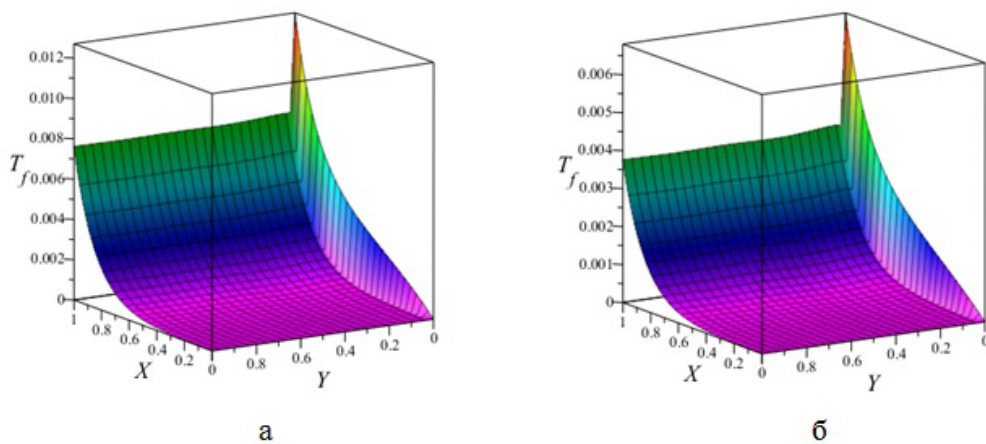


Рис. 8. Поле температур теплоносителя в пористом плоском теплообменнике: а –  $\varepsilon = 0,7$ ; б –  $\varepsilon = 0,5$

## Заключение

Предложенная математическая модель, отвечающая условиям адекватности и корректности, позволяет рассматривать ее как инструмент при выборе рациональных параметров плоского пористого теплообменника с требуемыми теплофизическими характеристиками.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы (Соглашение № 14.577.21.0202, уникальный идентификатор RFMEFI57715X0202).*

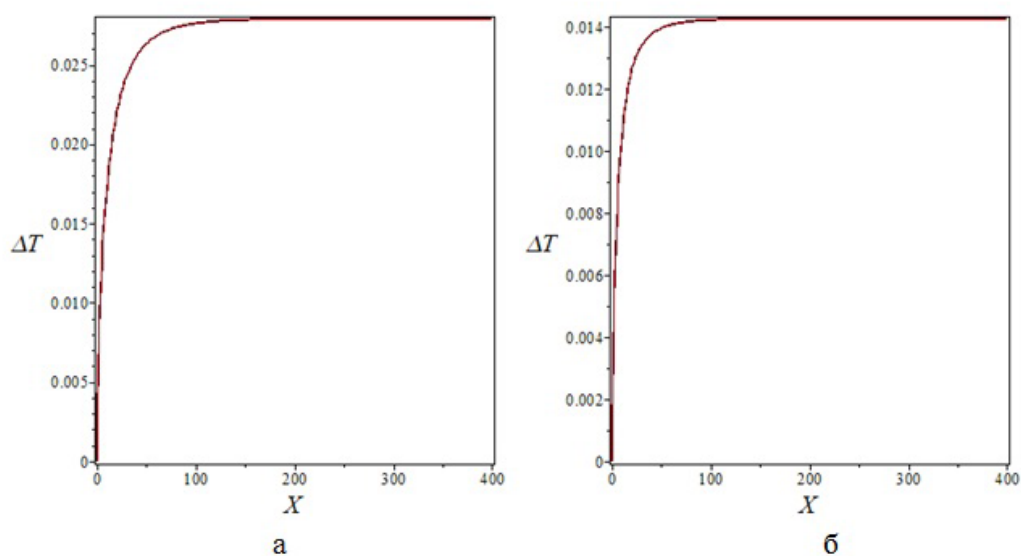


Рис. 9. Температура перегрева теплоносителя у «горячей» стенки относительно средней температуры по сечению теплообменника: а –  $\varepsilon = 0,7$ ; б –  $\varepsilon = 0,5$

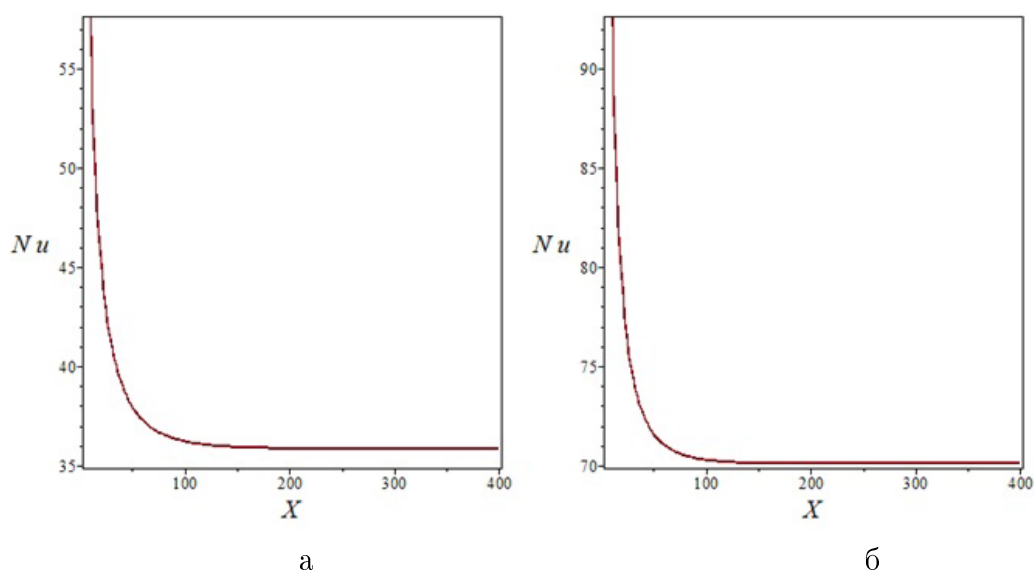


Рис. 10. Локальное число Нуссельта: а –  $\varepsilon = 0,7$ ; б –  $\varepsilon = 0,5$

## Литература

1. Kraus, A.D. Thermal Analysis and Control of Electronic Equipment / A.D. Kraus, A. Bar-Cohen. – Washington: Hemisphere Publishing Co., 1983. – 620 p.
2. Калинин, Э.К. Эффективные поверхности теплообмена / Э.К. Калинин, Г.А. Дрейцер, И.З. Кош, А.С. Мякочин. – М.: Энергоатомиздат, 1998. – 408 с.
3. Delavar, M.A. I Using Porous for Heat Transfer Enhancement in Heat Exchangers: Review / M.A. Delavar, M. Azimi // Journal of Engineering Science and Technology Review. – 2013. – V. 6, № 1. – P. 14–16.

4. Bear, J. Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 553 p.
5. Hsu, C.T. Thermal Dispersion in a Porous Medium / C.T. Hsu, P. Cheng // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1990. – V. 33, № 8. – P. 1587–1597.
6. Beji, H. Influence of Thermal Dispersion on Natural-Convection Heat-Transfer in Porous-Media / H. Beji, D. Gobin // Numerical Heat Transfer, Part A. – 1992. – V. 22. – P. 487–500.
7. Gamal, A.A. Problems of Modeling Flow and Heat Transfer in Porous Media / A.A. Gamal, P. Furmanski // Biuletyn Instytutu Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej. – 1997. – № 85. – P. 55–88.
8. Amiri, A. Analysis of Dispersion Effects and Non-Thermal Equilibrium, Non-Darcian, Variable Porosity Incompressible Flow Through Porous Media / A. Amiri, K. Vafai // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1994. – V. 37. – № 6. – P. 939–954.
9. Попов, И.А. Гидродинамика и теплообмен в пористых теплообменных элементах и аппаратах / И.А. Попов. – Казань: Центр инновационных технологий, 2007. – 240 с.
10. Vafai, K. Handbook of Porous Media / K. Vafai. – N.-Y.: CRC Press Taylor and Francis Group, 2005. – 742 p.
11. Transport Phenomena in Porous Media. Vol. III / Edited by D.B. Ingham, I. Pop. – Oxford: Elsevier, 2005. – 476 p.
12. Ezzati, R. Application of Homotopy Perturbation Method for Solving Brinkman Momentum Equation for Fully Developed Forced Convection in a Porous Saturated Channel / R. Ezzati, S.M. Rassoulinejad-Mousavi // Mathematical Science. – 2011. – V. 5, № 2. – P. 111–123.
13. Nield, D.A. Convection in Porous Media / D.A. Nield, A. Bejan. – N.-Y.: Springer, 2006. – 654 p.
14. Zehforoosh, A. Numerical Investigation of Forced Convection Heat Transfer for Laminar Flow in Various Parallel Porous Channels / A. Zehforoosh, S. Hossainpour, A. Tahery // International Journal of Innovation Management. – 2010. – V. 1, № 3. – P. 252–258.
15. Izadpanah, M.R. Experimental and Theoretical Studies of Convective Heat Transfer in a Cylindrical Porous Medium / M.R. Izadpanah, H. Muller-Steinhagen, M. Jamialahmadi // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 1998. – V. 19. – P. 629–635.
16. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 579 с.
17. Emerging Technologies and Techniques in Porous Media. – Dordrecht; London: Kluwer Academic, 2004.
18. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Деч. – М.: Физматгиз, 1971. – 288 с.
19. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюат, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1975. – 688 с.
20. Кэйс, В.М. Компактные теплообменники / В.М. Кэйс, А.Л. Лондон. – М.; Л.: ГЭИ, 1962. – 160 с.
21. Shah, R.K. Laminar Flow Forced Convection in Ducts / R.K. Shah, A.L. London. – N.-Y.: Academic Press, 1978. – 477 p.
22. Снеддон, И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М.: ИЛ, 1955. – 688 с.
23. Интенсификация теплообмена. Т. 2 / Ю.В. Вилемас, Г.И. Воронин, Б.В. Дзюбенко и др. – Вильнюс: Мокслас, 1988. – 188 с.

Виктор Иванович Рязских, доктор технических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskih\_vi@mail.ru.

Дмитрий Альбертович Коновалов, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Теоретическая и промышленная теплоэнергетика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), dmikonovalov@yandex.ru.

Михаил Иванович Слюсарев, доктор технических наук, доцент, 3 научно-исследовательский отдел, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж, Российская Федерация), mslyusarev52@yandex.ru.

Игорь Геннадьевич Дроздов, доктор технических наук, профессор, кафедра «Ракетные двигатели», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), drozdov\_ig@mail.ru.

*Поступила в редакцию 6 апреля 2016 г.*

---

MSC 35K60

DOI: 10.14529/mmp160306

## ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL OF HEAT REMOVAL FROM THE FLAT SURFACE BY THE LAMINAR MOVING REFRIGERANT THROUGH CONJUGATION POROUS MEDIUM

**V.I. Ryazhskih**, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ryazhskih\_vi@mail.ru,

**D.A. Konovalov**, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, dmikonovalov@yandex.ru,

**M.I. Slyusarev**, Military Educational and Scientific Center of the Air Force "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russian Federation, mslyusarev52@yandex.ru,

**I.G. Drozdov**, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, drozdov\_ig@mail.ru

A mathematical model of convective heat transfer in a flat porous channel for the laminar flow of Newtonian medium in the form of a boundary value problem for conjugate

equations of Darcy – Brinkman – Forchheimer in Darcy – Brinkman approximation and heat transfer in the Schumann's form with the second kind thermal boundary conditions is proposed. An analytical solution of the model equations to calculate the thermal and hydrodynamic fields is obtained by the method of integral transforms. It allowed to find the exact ratios for the hydrodynamic entrance region length, Fanning's hydraulic friction coefficient, identify the local characteristics of the liquid phase and a porous skeleton temperature fields depending on the porosity, as well as to evaluate the local Nusselt numbers and determine the effective heat exchange domain. The data obtained do not contradict the classical results.

*Keywords:* porous media; heat transfer; flat channel; flow resistance; initial hydrodynamic region.

## References

1. Kraus A.D., Bar-Cohen A. *Thermal Analysis and Control of Electronic Equipment*. Washington: Hemisphere Publishing Co., 1983. 620 p.
2. Kalinin E.K., Dreytser G.A., Kopp I.Z., Myakochin A.S. *Effektivnye poverkhnosti teploobmena* [Effective Heat Exchange Surfaces]. Moscow, Energoatomizdat, 1998. 408 p.
3. Delavar M.A., Azimi M. I Using Porous for Heat Transfer Enhancement in Heat Exchangers: Review. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 14–16.
4. Bear J., Bachmat Y. *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991. 553 p.
5. Hsu C.T., Cheng P. Thermal Dispersion in a Porous Medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1990, vol. 33, no. 8, pp. 1587–1597.
6. Beji H., Gobin D. Influence of Thermal Dispersion on Natural-Convection Heat-Transfer in Porous-Media. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 1992, vol. 22, pp. 487–500.
7. Gamal A.A., Furmanski P. Problems of Modeling Flow and Heat Transfer in Porous Media. *Biuletyn Instytutu Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej*, 1997, no. 85, pp. 55–88.
8. Amiri A., Vafai K. Analysis of Dispersion Effects and Non-Thermal Equilibrium, Non-Darcian, Variable Porosity Incompressible Flow Through Porous Media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1994, vol. 37, no. 6, pp. 939–954.
9. Popov I.A. *Gidrodinamika i teploobmen v poristykh teploobmennyykh elementakh i apparatakh* [Hydrodynamics and Heat Transfer in Porous Heat Exchange Elements and Devices]. Kazan, Tsentr innovatsionnykh tekhnologiy, 2007. 240 p.
10. Vafai K. *Handbook of Porous Media*. N.Y., CRC Press Taylor and Francis Group, 2005. 742 p. DOI: 10.1201/9780415876384
11. *Transport Phenomena in Porous Media. Vol. III*. Oxford, Elsevier, 2005. 476 p.
12. Ezzati R., Rassoulinejad Mousavi S.M. Application of Homotopy Perturbation Method for Solving Brinkman Momentum Equation for Fully Developed Forced Convection in a Porous Saturated Channel. *Mathematical Science*, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 111–123.
13. Nield D.A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. N.Y., Springer, 2006. 654 p.
14. Zehforoosh A., Hossainpour S., Tahery A. Numerical Investigation of Forced Convection Heat Transfer for Laminar Flow in Various Parallel Porous Channels. *International Journal of Innovation and Technology Management*, 2010, vol. 1, no. 3, pp. 252–258.
15. Izadpanah M.R., Muller-Steinhagen H., Jamialahmadi M. Experimental and Theoretical Studies of Convective Heat Transfer in a Cylindrical Porous Medium. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1998, vol. 19, pp. 629–635.

16. Slyezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neshhimaemoy zhidkosti* [The Viscous Incompressible Fluid Dynamics]. Moscow, Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. 579 p.
17. *Emerging Technologies and Techniques in Porous Media*. Dordrecht, London, Kluwer Academic, 2004.
18. Dutsch G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der z-ransformation*. Munchen, Wien, Oldenbourg, 1981.
19. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport Phenomena*. N.Y., London, J. Wiley and Sons, 2002. 914 p.
20. Kays W.M., London A.L. *Compact Heat Exchangers*. N.Y., McGraw-Hill Book Co., 1964. 272 p.
21. Shah R.K., London A.L. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. N.Y., Academic Press, 1978. 477 p.
22. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. N.Y., McGraw-Hill, 1951, 542 p.
23. Vilemas Y.V., Voronin G.I., Dzyubenko B.V. et al. *Intensifikatsyay teploobmena* [Intensification of Heat Exchange. Vol. 2.]. Vilnius, Mokslas, 1988. 188 p.

*Received April 6, 2016*